МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК И МАТЕМАТИКИ

Кафедра математического анализа

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ФРАКТАЛЬНОСТЬ ИХ ГРАФИКОВ

Направление подготовки 01.04.01 «Математика»

Образовательная программа «Современные проблемы математики»

Зав. кафедрой:
к. ф.-м. н., доц. П. Ю. Глазырина

____

Магистерская диссертация

Гриднева
Максима Леонидовича

____

Нормоконтролер:
к. ф.-м. н., доц. М. В. Дейкалова

____

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., Н. Ю. Антонов

____

Екатеринбург

2019

РЕФЕРАТ

Griднев М. Л. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ФРАКТАЛЬНОСТЬ ИХ ГРАФИКОВ, магистерская диссертация: стр. 17, библ. назв. 4.

Ключевые слова: ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ, РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ, ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

Вводится понятие модуля фрактальности и рассматривается задача приближения функций с ограничением на модуль фрактальности частичными суммами тригонометрических рядов Фурье (суммами Фурье). Приведена оценка сверху модуля разности функции и соответствующей суммы Фурье, выраженная в терминах модуля непрерывности и модуля фрактальности. Построены примеры функций из рассматриваемых классов с расходящимся в некоторой точке тригонометрическим рядом Фурье.

Gridnev M. L. A STUDY OF THE BEHAVIOR OF TRIGONOMETRIC FOURIER SERIES OF FUNCTIONS WITH A RESTRICTION ON THE FRACTALITY OF THEIR GRAPHS, master's thesis: 17 pp., bibl. 4.

Key words: TRIGONOMETRIC FOURIER SERIES, UNIFORM CONVERGENCE, FRACTAL DIMENSION

We introduce the notion of the modulus of fractality and consider the problem of approximation of functions with a restriction on the modulus of fractality by partial sums of trigonometric Fourier series (Fourier sums). The upper estimate of the difference between the function and the corresponding Fourier sum in terms of the modulus of continuity and the modulus of fractality is given. Examples of functions from the considered classes with trigonometric Fourier series diverging at some point are constructed.

МЕСТО ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Кафедра математического анализа Института естественных наук и математики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ – множество действительных чисел;

$\omega_X(f, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : \quad x, y \in X, \ |x - y| \leqslant \delta\}$ – модуль непрерывности функции f, определенной на множестве $X \subset \mathbb{R}$;

$C_{2\pi}$ – множество всех определенных на $\mathbb{R}$ непрерывных 2π-периодических функций;

$\nu_{[a,b]}(f, \varepsilon)$ – модуль фрактальности функции f (с. 5, определение 1);

F^{μ} – класс функций с ограничением на модуль фрактальности (с. 5, определение 2);

$S_n(f, x)$ – значение n-й частичной суммы тригонометрического ряда Фурье функции f в точке x.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть f — 2π-периодическая суммируемая на $[0,2\pi]$ функция. Напомним, что ее коэффициенты и частные суммы тригонометрического ряда Фурье определяются следующим образом:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt,\;\; b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt,\;\; S_n(f,x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

В теории тригонометрических рядов интерес представляет вопрос об условиях сходимости рядов Фурье. Хорошо известен

Признак Дини – Липшица. *Пусть $f \in C_{2\pi}$, и ее модуль непрерывности $\omega(f,\delta) = \omega_{\mathbb{R}}(f,\delta)$ удовлетворяет условию*

$$\omega(f,\delta)\ln\left(\frac{1}{\delta}\right) \longrightarrow 0 \quad \textit{при } \delta \longrightarrow +0.$$

Тогда ряд Фурье функции f сходится равномерно на $[0,2\pi]$.

Этот признак, как известно, является неулучшаемым. В данной работе мы получим уточнение этого признака для класса непрерывных функций, имеющих ограничение на фрактальность графика.

Определение 1. Пусть дана ограниченная функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Модулем фрактальности функции f на отрезке* $[a,b]$ будем называть функцию $\nu_{[a,b]}(f,\varepsilon)$, которая любому ε, большему нуля, сопоставляет минимальное число замкнутых квадратов со сторонами длины ε, параллельными осям координат, которыми можно покрыть график функции f на отрезке $[a,b]$.

Замечание 1. Из определения модуля фрактальности следует, что

$$\frac{b-a}{\varepsilon} \leqslant \nu_{[a,b]}(f,\varepsilon) \leqslant \left(\frac{b-a}{\varepsilon}+1\right)\left(\frac{\max\{|f(x)-f(y)| :\; x,y\in[a,b]\}}{\varepsilon}+1\right) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

Понятие модуля фрактальности было предложено Н. Ю. Антоновым и С. В. Бердышевым и, насколько нам известно, в опубликованном виде встречалось лишь в работах автора настоящей диссертации.

Определение 2. *Пусть $\mu : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ — невозрастающая функция. Определим функциональный класс F^μ следующим образом*:

$$F^\mu := \{f \in C_{2\pi} :\; \nu_{[0,2\pi]}(f,\varepsilon) = O(\mu(\varepsilon)),\; \varepsilon > 0\}.$$

Замечание 2. График любой функции из F^μ, где $\mu(\varepsilon) = 1/\varepsilon^\alpha$, $\quad \alpha \in [1,2]$, имеет фрактальную размерность по Минковскому не большую α, что и обуславливает название модуля фрактальности.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1 Оценка частичной суммы ряда Фурье

В данном разделе приведены результаты из статьи [1]. А именно, дана оценка сверху модуля разности функции и соответствующей суммы Фурье, выраженная в терминах модуля непрерывности и модуля фрактальности, и следующие из неё признак сходимости ряда Фурье и оценка на рост сумм Фурье. Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1.1. *Если f — непрерывная на $[a,b]$ функция, и $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, то*

$$\frac{\max\{|f(x)-f(y)|:\ x,y\in[\alpha,\beta]\}}{\beta-\alpha}\leqslant \nu_{[\alpha,\beta]}(f,\beta-\alpha)\leqslant \frac{\omega_{[a,b]}(f,\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}+1. \tag{1.1}$$

Доказательство следует из того наблюдения, что количество квадратов со стороной длины $\beta-\alpha$ в минимальном покрытии графика непрерывной функции f на отрезке $[\alpha,\beta]$ равно округлению вверх числа $\max\{|f(x)-f(y)|/(\beta-\alpha):\ x,y\in[\alpha,\beta]\}$.

Обозначим отрезок $[\frac{(i-1)\pi}{n},\frac{i\pi}{n}]$ через $I(n,i)$.

Лемма 1.2. *Если f — непрерывная на $[0,2\pi]$ функция, то*

$$\sum_{i=1}^{2n}\nu_{I(n,i)}(f,\pi/n)\leqslant 3\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n). \tag{1.2}$$

Доказательство. Пусть K — множество квадратов со стороной π/n, составляющих минимальное покрытие функции f на отрезке $[0,2\pi]$, $\sharp K$ — мощность множества K. Согласно определению модуля фрактальности $\sharp K=\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)$. Для $i\in\{1,\ldots,2n\}$ обозначим через K_i подмножество множества K, состоящее из квадратов, имеющих непустое пересечение с полосой $I(n,i)\times\mathbb{R}$. Ясно, что объединение всех квадратов из K_i покрывает участок графика функции f, соответствующий отрезку $I(n,i)$. Поскольку $\nu_{I(n,i)}(f,\pi/n)$ — минимальное число квадратов, которыми можно покрыть участок графика функции f, соответствующий отрезку $I(n,i)$, то $\nu_{I(n,i)}(f,\pi/n)\le\sharp K_i$. Учитывая, что каждый квадрат из K_i может пересекаться не более чем с тремя полосами вида $I(n,j)\times\mathbb{R}$ (j может быть равным $i-1$, i или $i+1$), получаем

$$\sum_{i=1}^{2n}\nu_{I(n,i)}(f,\pi/n)\le\sum_{i=1}^{2n}\sharp K_i\le 3\sharp K=3\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 1.3. *Пусть для набора неотрицательных чисел $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ известны следующие* *ограничения:* $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i \leqslant A$ *и* $\sum_{i=1}^n a_i \leqslant AB$ *при некоторых* A *и* B*. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \leqslant 2A\ln\big(B+1\big).$$

Доказательство. При $B \geqslant n$ утверждение очевидно. Если $0 \leqslant B < 1$, то требуемое неравенство получается с помощью неравенства $B \leqslant 2\ln(B+1)$, которое следует из разложения в ряд Тейлора величины $\ln(B+1)$. Рассмотрим случай $1 \leqslant B < n$. Обоснуем неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant B} \frac{A}{i}.$$

Действительно,

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant B} \frac{A}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} = \sum_{1\leqslant i\leqslant B} \frac{A-a_i}{i} - \sum_{B<i\leqslant n} \frac{a_i}{i} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{B}\Bigg(\sum_{1\leqslant i\leqslant B}(A-a_i) - \sum_{B<i\leqslant n} a_i\Bigg) = \frac{1}{B}\Bigg(AB - \sum_{i=1}^{n} a_i\Bigg) \geqslant 0.$$

Теперь получим искомую оценку:

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant B} \frac{A}{i} \leqslant A \sum_{1\leqslant i\leqslant B} \int_i^{i+1} \frac{2}{t}dt \leqslant 2A \int_1^{B+1} \frac{1}{t}dt = 2A\ln(B+1).$$

Лемма 3 доказана.

Теорема 1.1. *Пусть* f *— непрерывная* 2π*-периодическая функция. Тогда для всех* $x \in [0, 2\pi]$

$$\big|S_n(f,x) - f(x)\big| \leqslant C\omega(f,\pi/n)\ln\left(\frac{\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)}{n}\right) + o(1), \tag{1.3}$$

где C *— абсолютная константа и оценка* $o(1)$ *равномерная по* x *при* $n \to \infty$*.*

Доказательство. Следуя доказательству признака Салема [1, гл. 4, §5], можно увидеть что при нечётных n

$$\big|S_n(f,x) - f(x)\big| \leqslant \frac{4}{\pi^2}\left(\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|T_n(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|Q_n(t)|\right) + o(1),$$

где

$$T_n(x) = \frac{f(x) - f\big(x+\frac{\pi}{n}\big)}{1} + \frac{f\big(x+\frac{2\pi}{n}\big) - f\big(x+\frac{3\pi}{n}\big)}{3} + \dots + \frac{f\big(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\big) - f(x+\pi)}{n}$$

и

$$Q_n(x) = \frac{f(x) - f\big(x-\frac{\pi}{n}\big)}{1} + \frac{f\big(x-\frac{2\pi}{n}\big) - f\big(x-\frac{3\pi}{n}\big)}{3} + \dots + \frac{f\big(x-\frac{(n-1)\pi}{n}\big) - f(x-\pi)}{n}.$$

Оценим абсолютные значения $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ сверху через выражения из правой части (1.3). Рассмотрим $T_n(x)$. Случай с $Q_n(x)$ рассматривается аналогично.

Применив левое неравенство из (1.1) и добавив недостающие члены к получившейся сумме, получаем

$$|T_n(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi \nu_{[x+\frac{(i-1)\pi}{n}, x+\frac{i\pi}{n}]}(f, \pi/n)}{in}. \tag{1.4}$$

При любом фиксированном $x \in [0, 2\pi]$, каждому $i \in \mathbb{N}$ сопоставим минимальное целое k_i, для которого $[x + \frac{(i-1)\pi}{n}, x + \frac{i\pi}{n}] \subset I(n, k_i) \cup I(n, k_i + 1)$ и соответственно

$$\nu_{[x+\frac{(i-1)\pi}{n}, x+\frac{i\pi}{n}]}(f, \pi/n) \leqslant \nu_{I(n,k_i)}(f, \pi/n) + \nu_{I(n,k_i+1)}(f, \pi/n).$$

Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi \nu_{[x+\frac{(i-1)\pi}{n}, x+\frac{i\pi}{n}]}(f, \pi/n)}{in} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi \nu_{I(n,k_i)}(f, \pi/n) + \pi \nu_{I(n,k_i+1)}(f, \pi/n)}{in}. \tag{1.5}$$

Нетрудно видеть, что для каждого $k = 1, \ldots, 2n$ величина $\nu_{I(n,k)}(f, \pi/n)$ встречается в правой части (1.5) не более двух раз (в силу периодичности f отрезки $I(n, i)$ и $I(n, i + 2kn)$ считаем одинаковыми). Используя этот факт и лемму 2, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi \nu_{I(n,k_i)}(f, \pi/n) + \pi \nu_{I(n,k_i+1)}(f, \pi/n)}{n} \leqslant \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{2n} \nu_{I(n,k)}(f, \pi/n) \leqslant \frac{6\pi \nu_{[0,2\pi]}(f, \pi/n)}{n}. \tag{1.6}$$

Кроме того, согласно лемме 1 для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{\pi \nu_{I(n,k_i)}(f, \pi/n) + \pi \nu_{I(n,k_i+1)}(f, \pi/n)}{n} \leqslant 2\omega(f, \pi/n) + \frac{2\pi}{n}. \tag{1.7}$$

Теперь, имея (1.6), (1.7), воспользуемся леммой 3. Также пользуясь замечанием 1 после определения 1, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi \nu_{I(n,k_i)}(f, \pi/n) + \pi \nu_{I(n,k_i+1)}(f, \pi/n)}{in} \leqslant$$

$$\leqslant 4\left(\omega(f, \pi/n) + \frac{\pi}{n}\right) \ln\left(\frac{3\pi \nu_{[0,2\pi]}(f, \pi/n)}{n\omega(f, \pi/n) + \pi} + 1\right) =$$

$$= 4\omega(f, \pi/n) \ln\left(\frac{3\pi \nu_{[0,2\pi]}(f, \pi/n) + n\omega(f, \pi/n) + \pi}{n}\right) +$$

$$+ \frac{4\pi}{n} \ln\left(\frac{3\pi \nu_{[0,2\pi]}(f, \pi/n) + n\omega(f, \pi/n) + \pi}{n}\right) +$$

$$+ 4\left(\omega(f, \pi/n) + \frac{\pi}{n}\right) \ln\left(\frac{1}{\omega(f, \pi/n) + \pi/n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 4\omega(f,\pi/n)\ln\left(\frac{3\pi\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)}{n}+1\right)+\frac{4\pi}{n}\ln\big(Cn\big)+$$

$$+o(1)\leqslant 4\omega(f,\pi/n)\ln\left(\frac{\nu^5_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)}{n^5}\right)+o(1)\leqslant$$

$$\leqslant 20\omega(f,\pi/n)\ln\left(\frac{\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)}{n}\right)+o(1),$$

что вместе с (1.4) и (1.5) завершает получение оценки (1.3) для нечётных n. Ясно, что тогда для чётных n оценка (1.3) также имеет место. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы автоматически вытекают два следствия.

Следствие 1.1. *Пусть f — непрерывная 2π-периодическая функция и её модули непрерывности и фрактальности удовлетворяют условию*

$$\omega(f,\pi/n)\ln\left(\frac{\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)}{n}\right)\longrightarrow 0 \quad \textit{при } n\longrightarrow+\infty.$$

Тогда ряд Фурье функции f сходится равномерно на $[0,2\pi]$.

Следствие 1.2. *Пусть f — непрерывная 2π-периодическая функция и $f\notin F^{1/\varepsilon}$. Тогда равномерно по $x\in[0,2\pi]$ имеет место оценка*

$$S_n(f,x)=o\Bigg(\ln\left(\frac{\nu_{[0,2\pi]}(f,\pi/n)}{n}\right)\Bigg). \tag{1.8}$$

Замечание 3. Если в следствиях 1 и 2 функция f принадлежит F^μ, где $\mu(\varepsilon)=1/\varepsilon^\alpha$, $1<\alpha\leqslant 2$, то мы получим признак Дини–Липшица и известную оценку для непрерывных функций $S_n(f,x)=o(\ln n)$ соответственно, которые, как известно, неулучшаемы. Если же $\mu(\varepsilon)$ — функция, стремящаяся к бесконечности в нуле медленнее чем $1/\varepsilon^\alpha$, при любом $\alpha>1$, но быстрее чем $1/\varepsilon$, например если $\mu(\varepsilon)=\ln(1/\varepsilon)/\varepsilon$, то получим усиление данных утверждений для более узкого, чем $C_{2\pi}$, класса функций F^μ.

2 Пример функции из класса F^μ с расходящимся рядом Фурье

В данном разделе приведен результат из статьи [3], уточненный в статье [4]. Следующая теорема показывает, что оценка (1.8) является неулучшаемой по порядку. Эта теорема также содержит пример функции из класса F^μ, более широкого, чем $F^{\frac{1}{\varepsilon}}$, с расходящимся рядом Фурье в некоторой точке.

Теорема 2.2. *Пусть $\mu:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ — непрерывная функция, $\varepsilon\mu(\varepsilon)$ не возрастает и стремится к $+\infty$ при $\varepsilon\to+0$. Тогда для любой неубывающей последо-*

вательности положительных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, *удовлетворяющей условию*

$$\lambda_n = o\biggl(\ln\left(\frac{\mu(\pi/n)}{n}\right)\biggr), \tag{2.1}$$

найдется функция $f \in F^{\mu}$ *такая, что*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n(f,0)|}{\lambda_n} > 0.$$

Доказательство. В основе построенной ниже функции лежит конструкция примера Лебега из [2, гл. 1, §46].

Без ограничения общности потребуем от $\mu(\varepsilon)$, чтобы

$$\varepsilon^{-1} < \mu(\pi\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon^{-\frac{3}{2}}, \quad \varepsilon \in (0,1]. \tag{2.2}$$

Из условия

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\mu(\varepsilon) \ = \ +\infty \tag{2.3}$$

первое неравенство в (2.2) выполняется на некотором интервале $(0,\delta)$, а изменение функции μ с сохранением непрерывности на интервале $(\frac{\delta}{2},1)$ не повлияет на класс F^{μ}. Требование второго неравенства может только уменьшить класс F^{μ}, поэтому если мы найдем подходящую функцию из более узкого класса, то она автоматически будет из более широкого.

Определим возрастающую последовательность натуральных чисел $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом. Пусть $a_0 = 1$. Далее предположим, что первые k членов $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ уже определены. Из неравенств (2.2) получается, что

$$\frac{a_{k-1}^2}{a_{k-1}} < 3\mu\left(\frac{\pi}{a_{k-1}}\right)$$

и для $b \geqslant (6a_{k-1})^2$

$$\frac{b^2}{a_{k-1}} \geqslant 3\mu\left(\frac{\pi}{b}\right).$$

Тогда по непрерывности существует наименьшее число a, удовлетворяющее равенству

$$\frac{a^2}{a_{k-1}} = 3\mu\left(\frac{\pi}{a}\right).$$

В качестве a_k возьмем такое наибольшее целое число, не превосходящее a, чтобы дробь $\frac{a_k}{a_{k-1}}$ была целым числом. Нетрудно понять, что a_k принадлежит отрезку $[a - a_{k-1}, a]$, и по неравенствам

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} \geqslant \frac{a - a_{k-1}}{a_{k-1}} = 3\mu\left(\frac{\pi}{a}\right)\frac{1}{a} - 1 \geqslant 2 \tag{2.4}$$

получаем, что $a_k > a_{k-1}$.

Из определения a_k следует неравенство

$$\frac{1}{\varepsilon^2 a_{k-1}} \leqslant 3\mu\big(\pi\varepsilon\big), \quad \varepsilon \in \left[\frac{1}{a_k}, 1\right], \tag{2.5}$$

и свойство

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} \to +\infty, \quad k \to +\infty, \tag{2.6}$$

которое доказывается с помощью неравенств (2.4) и условия (2.3).

Зададим полуинтервалы

$$I_k = \left(\frac{\pi}{a_k}, \frac{\pi}{a_{k-1}}\right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, условия на рост которой мы определим позже. Положим

$$c_k = \begin{cases} \lambda_{a_{k_i}} / \ln\left(\frac{3\mu(\pi/a_{k_i})}{a_{k_i}} - 1\right), & k \in \{k_i\}_{i=1}^{\infty}; \\ 0, & k \notin \{k_i\}_{i=1}^{\infty}. \end{cases}$$

Наконец, определим функцию f на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = c_k \sin a_k x, \quad x \in I_k,\ k \in \mathbb{N};$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(-x) = f(x).$$

Получившаяся функция непрерывна на каждом I_k. Кроме того, она равна нулю и непрерывна в точках $\pm\frac{\pi}{a_k}$ в силу того, что дробь $\frac{a_k}{a_{k-1}}$ — целое число. Таким образом, функция f непрерывна всюду на $[-\pi, \pi]\backslash\{0\}$. Непрерывность функции f в точке 0 вытекает из того, что $c_k \to 0$ при $k \to \infty$ в силу (2.1). Продолжим 2π-периодически функцию f с отрезка $[-\pi, \pi]$ на всю ось $\mathbb{R}$. Получившаяся функция будет непрерывна на всей оси, то есть $f \in C_{2\pi}$.

Рассмотрим теперь последовательность частичных сумм ряда Фурье функции f в точке $x = 0$. Используя интегральное представление суммы Фурье (см., например, [1, гл. 1, §32, формула (32.5)] и четность функции f, имеем

$$S_k(f, 0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\frac{\sin kt}{t}dt + o(1) \quad \text{при } k \to +\infty.$$

Положим

$$J_i = \int_0^{\pi} f(t)\frac{\sin a_{k_i} t}{t}dt.$$

Чтобы оценить J_i, разобьем его на три слагаемых

$$J_i = \int_0^{\frac{\pi}{a_{k_i}}} f(t)\frac{\sin a_{k_i} t}{t}dt + \int_{\frac{\pi}{a_{k_i}}}^{\frac{\pi}{a_{k_i-1}}} f(t)\frac{\sin a_{k_i} t}{t}dt + \int_{\frac{\pi}{a_{k_i-1}}}^{\pi} f(t)\frac{\sin a_{k_i} t}{t}dt = J_i' + J_i'' + J_i'''. \quad (2.7)$$

Имеем

$$\left|\frac{\sin a_{k_i} t}{t}\right| \leqslant a_{k_i}.$$

Значит,

$$|J_i'| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{a_{k_i}}} |f(t)| a_{k_i} \frac{\pi}{a_{k_i}} = \pi \max_{j\geqslant i+1} c_{k_j} = o(1). \quad (2.8)$$

Предположим теперь, что $k_1, \ldots, k_{i-1}$ уже определены, тогда функция $\frac{f(t)}{t}$ определена, ограничена и непрерывна на $\left(\frac{\pi}{a_{k_{i-1}}}, \pi\right]$. Если мы продолжим эту функцию нулем на $[-\pi, \pi]$, то потребовав, чтобы k_i было достаточно велико, мы можем сделать a_{k_i}-й коэффициент Фурье полученной функции сколь угодно малым, например,

$$|J_i'''| = \left|\int_{\frac{\pi}{a_{k_i-1}}}^{\pi} \frac{f(t)}{t}\sin a_{k_i} t\ dt\right| \leqslant \frac{1}{i}. \quad (2.9)$$

Остается оценить J_i''. Имеем

$$J_i'' = \int_{\frac{\pi}{a_{k_i}}}^{\frac{\pi}{a_{k_i-1}}} \frac{c_{k_i}(\sin a_{k_i} t)^2}{t}dt = \frac{c_{k_i}}{2}\int_{\frac{\pi}{a_{k_i}}}^{\frac{\pi}{a_{k_i-1}}} \frac{1-\cos 2a_{k_i} t}{t}dt =$$

$$= \frac{c_{k_i}}{2}\ln\frac{a_{k_i}}{a_{k_i-1}} - \frac{c_{k_i}}{2}\int_{\frac{\pi}{a_{k_i}}}^{\frac{\pi}{a_{k_i-1}}} \frac{\cos 2a_{k_i} t}{t}dt.$$

Согласно второй теореме о среднем, учитывая, что функция $\frac{1}{t}$ положительна и убывает на отрезке интегрирования, находим

$$\left|\int_{\frac{\pi}{a_{k_i}}}^{\frac{\pi}{a_{k_i-1}}} \frac{\cos 2a_{k_i} t}{t}dt\right| \leqslant \frac{a_{k_i}}{\pi}\left|\int_{\frac{\pi}{a_{k_i}}}^{\xi} \cos 2a_{k_i} t\ dt\right| \leqslant \frac{a_{k_i}}{\pi}\frac{2}{2a_{k_i}} = \frac{1}{\pi}, \quad \text{где } \xi \in \left[\pi/a_{k_i}, \pi/a_{k_i-1}\right].$$

Поэтому

$$J_i'' = \frac{c_{k_i}}{2}\ln\frac{a_{k_i}}{a_{k_i-1}} + o(1). \quad (2.10)$$

Объединяя (2.7), (2.8), (2.9) и (2.10), получаем

$$J_i = \frac{c_{k_i}}{2}\ln\frac{a_{k_i}}{a_{k_i-1}} + o(1).$$

Отсюда, воспользовавшись (2.4), заключаем

$$S_{a_{k_i}}(f, 0) \geqslant \frac{c_{k_i}}{\pi}\ln\frac{a_{k_i}}{a_{k_i-1}} + o(1) \geqslant \frac{c_{k_i}}{\pi}\ln\left(3\mu\left(\frac{\pi}{a_k}\right)\frac{1}{a_k} - 1\right) + o(1) = \lambda_{a_{k_i}}/\pi + o(1),$$

что и требовалось.

Теперь докажем, что $f \in F^{\mu}$, т. е. оценим модуль фрактальности $\nu(f,\varepsilon)$. Для удобства введем следующее обозначение. Через $\nu(f,\varepsilon)_{[a,b]}$ будем обозначать минимальное количество квадратов, со сторонами длины ε, параллельными осям координат, которыми можно покрыть график функции f на отрезке $[a,b]$.

Если $k_1,\dots,k_{i-1}$ уже определены, то функция f определена на отрезке $[\frac{\pi}{a_{k_{i-1}}},\pi]$ и является функцией ограниченной вариации, значит, согласно теореме 1 из [2]

$$\nu(f,\varepsilon)_{\left[\frac{\pi}{a_{k_{i-1}}},\pi\right]} = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Из условия теоремы получаем, что можно взять такое k_i, чтобы

$$\nu(f,\pi\varepsilon)_{\left[\frac{\pi}{a_{k_{i-1}}},\pi\right]} \leqslant \mu(\pi\varepsilon), \tag{2.11}$$

где $\pi\varepsilon \leqslant \frac{\pi}{a_{k_i}}$. Это второе условие на k_i.

Пусть $0<\varepsilon\leqslant 1$, тогда найдется $i\in\mathbb{N}$ такой, что $\varepsilon\in[\frac{1}{a_{k_{i+1}}},\frac{1}{a_{k_i}}]$. Покажем справедливость неравенства $\nu(f,\pi\varepsilon)\leqslant C\mu(\pi\varepsilon)$, где C – некоторая константа. Из полученного выше, требуемое неравенство справедливо для покрытия графика на отрезке $[\frac{\pi}{a_{k_{i-1}}},\pi]$. Аналогично можно сказать и про отрезки $[\frac{\pi}{a_{k_{i+1}-1}},\frac{\pi}{a_{k_i}}]$, $[\frac{\pi}{a_{k_i-1}},\frac{\pi}{a_{k_{i-1}}}]$, на которых f тождественно равна нулю, а, значит,

$$\nu(f,\pi\varepsilon)_{\left[\frac{\pi}{a_{k_{i+1}-1}},\frac{\pi}{a_{k_i}}\right]} + \nu(f,\pi\varepsilon)_{\left[\frac{\pi}{a_{k_i-1}},\frac{\pi}{a_{k_{i-1}}}\right]} \leqslant \frac{\pi}{\varepsilon}. \tag{2.12}$$

Если полностью покрыть прямоугольник $\left[0,\frac{\pi}{a_{k_{i+1}-1}}\right]\times[-c_{k_i},c_{k_i}]$, то с помощью неравенства (1.6) можно установить следующую оценку (здесь и далее, под $\lceil x\rceil$ мы будем понимать округление вверх числа x):

$$\nu(f,\pi\varepsilon)_{\left[0,\frac{\pi}{a_{k_{i+1}-1}}\right]} \leqslant \left\lceil\frac{\pi}{a_{k_{i+1}-1}\pi\varepsilon}\right\rceil\left\lceil\frac{2c_{k_i}}{\pi\varepsilon}\right\rceil \leqslant \frac{8}{a_{k_{i+1}-1}\pi\varepsilon^2} \leqslant \frac{24}{\pi}\mu\big(\pi\varepsilon\big). \tag{2.13}$$

Осталось покрыть график на отрезке $\left[\frac{\pi}{a_{k_i}},\frac{\pi}{a_{k_i-1}}\right]$, на котором $f(x)=c_{k_i}\sin a_{k_i}x$. Этот отрезок можно разбить на $N_i = 2\frac{a_{k_i}}{a_{k_i-1}}-2$ участков монотонности функции f, то есть на отрезки $\left[\frac{\pi}{a_{k_i}}+\frac{\pi(n-1)}{2a_{k_i}},\frac{\pi}{a_{k_i}}+\frac{\pi n}{2a_{k_i}}\right]$, $n=1,\dots,N_i$. Покажем, что для покрытия графика этой функции на каждом промежутке монотонности требуется не более $\frac{8}{\pi\varepsilon}$ квадратов. Из определения длины кривой (через вписанные ломаные) видно, что длина графика f на указанных отрезках не больше $\frac{\pi}{2a_{k_i}}+2c_{k_i}$. А так как квадрат со стороной $\pi\varepsilon$ способен покрыть участок графика монотонной функции как минимум длины $\pi\varepsilon$ (это также доказывается с помощью определения длины кривой), то справедлива следующая оценка:

$$\nu(f,\pi\varepsilon)_{\left[\frac{\pi}{a_{k_i}}+\frac{\pi(n-1)}{2a_{k_i}},\frac{\pi}{a_{k_i}}+\frac{\pi n}{2a_{k_i}}\right]}=\nu(f,\pi\varepsilon)_n\leqslant\left\lceil\left(\frac{\pi}{2a_{k_i}}+2c_{k_i}\right)\frac{1}{\pi\varepsilon}\right\rceil\leqslant\frac{8}{\pi\varepsilon}.$$

Из (2.5) и монотонности $\varepsilon\mu(\varepsilon)$ получается, что

$$\nu(f,\pi\varepsilon)_{\left[\frac{\pi}{a_{k_i}},\frac{\pi}{a_{k_i-1}}\right]}\leqslant\sum_{n=1}^{N_i}\nu(f,\pi\varepsilon)_n\leqslant\frac{16a_{k_i}}{\pi\varepsilon a_{k_i-1}}\leqslant \tag{2.14}$$

$$\leqslant\frac{48\mu\left(\frac{\pi}{a_{k_i}}\right)}{\pi\varepsilon a_{k_i}}=\frac{48\mu\left(\frac{\pi}{a_{k_i}}\right)\frac{\pi}{a_{k_i}}\mu(\pi\varepsilon)}{\pi^2\varepsilon\mu(\pi\varepsilon)}\leqslant\frac{48}{\pi}\mu(\pi\varepsilon). \tag{2.15}$$

В итоге, используя полученные неравенства (2.11), (2.12), (2.13) и (2.14), оцениваем модуль фрактальности функции f так:

$$\nu(f,\pi\varepsilon)\leqslant 2\nu(f,\pi\varepsilon)_{[0,\pi]}\leqslant 2\Bigg(\nu(f,\pi\varepsilon)_{\left[0,\frac{\pi}{a_{k_{i+1}-1}}\right]}+\nu(f,\pi\varepsilon)_{\left[\frac{\pi}{a_{k_{i+1}-1}},\frac{\pi}{a_{k_i}}\right]}+$$

$$+\nu(f,\pi\varepsilon)_{\left[\frac{\pi}{a_{k_i}},\frac{\pi}{a_{k_i-1}}\right]}+\nu(f,\pi\varepsilon)_{\left[\frac{\pi}{a_{k_i-1}},\frac{\pi}{a_{k_{i-1}}}\right]}+\nu(f,\pi\varepsilon)_{\left[\frac{\pi}{a_{k_{i-1}}},\pi\right]}\Bigg)\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{24}{\pi}\mu\big(\pi\varepsilon\big)+\frac{\pi}{\varepsilon}+\frac{48}{\pi}\mu(\pi\varepsilon)+\mu(\pi\varepsilon)\right)=O\big(\mu(\pi\varepsilon)\big),$$

то есть $f\in F^\mu$. Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована задача приближения функций с ограничением на модуль фрактальности частичными суммами тригонометрических рядов Фурье. В ходе работы получены следующие результаты.

1. Приведена оценка сверху модуля разности функции и соответствующей суммы Фурье, выраженная в терминах модуля непрерывности и модуля фрактальности.

2. Как следствие получены признак равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной функции в терминах модуля непрерывности и модуля фрактальности этой функций, а также оценка на рост частичных сумм ряда Фурье непрерывной функции в терминах модуля фрактальности.

3. Для любого функционального класса F^{μ}, более широкого, чем $F^{\frac{1}{\varepsilon}}$, построен пример функции из F^{μ} с рядом Фурье, не являющимся сходящимся всюду.

По результатам исследований сделаны доклады на следующих конференциях.

1. 6th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields (Hungary, Pecs, 24–31 August 2017)

2. 19-я международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 29 января – 2 февраля 2018 г.)

3. Международная (49-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 4–10 февраля 2018 г.);

4. Международная Школа-конференция С. Б. Стечкина по теории функций (Кыштым, 1–10 августа 2018 г.);

5. Международная (50-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 3–9 февраля 2019 г.).

Полученные результаты опубликованы в статьях [3, 4].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1 Бари Н. К. Тригонометрические ряды. – М.: ГИМФЛ. – 1961. – 937 с.

2 Гриднев М. Л. О классах функций с ограничением на фрактальность их графика // Proceedings of the 48th International Youth School-Conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications". – Екатеринбург, 2017. – С. 167–173.

3 Gridnev M. L. Divergence of Fourier series of continuous functions with restriction on the fractality of their graphs // Ural Math. Journal. – 2017. – V. 3, № 2., P. 46–50.

4 Гриднев М. Л. Сходимость тригонометрических рядов Фурье функций с ограничением на фрактальность их графиков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2018. – Т. 24, № 4. – С. 104–109.